

کد کنترل

333A



صبح جمعه



جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان نخش آموزش کشور

«علم و تحقیق، کلید پیشرفت کشور است.»
مقام معظم رهبری (ره)

آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته – سال ۱۴۰۵
آمار (کد ۱۲۰۷)

مدت زمان پاسخ‌گویی: ۲۵۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۱۰۵ سؤال

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤال‌ها

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	زبان عمومی و تخصصی (انگلیسی)	۲۵	۱	۲۵
۲	دروس پایه (ریاضی عمومی (۱ و ۲)، مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی و مبانی احتمال)	۲۵	۲۶	۵۰
۳	دروس تخصصی ۱ (احتمال (۱ و ۲)، آمار ریاضی (۱ و ۲))	۳۲	۵۱	۸۲
۴	دروس تخصصی ۲ (نمونه‌گیری (۱ و ۲)، رگرسیون (۱))	۲۳	۸۳	۱۰۵

این آزمون نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

* داوطلب گرامی، عدم درج مشخصات و امضا در مندرجات کادر زیر، به منزله عدم حضور شما در جلسه آزمون است.

اینجانب با شماره داوطلبی با آگاهی کامل، یکسان بودن شماره صندلی خود
با شماره داوطلبی مندرج در بالای کارت ورود به جلسه، بالای پاسخنامه و دفترچه سؤالات، نوع و کد کنترل درج شده
بر روی جلد دفترچه سؤالات و پایین پاسخنامه ام را تأیید می‌نمایم.

امضا:

زبان عمومی و تخصصی (انگلیسی):

PART A: Vocabulary

Directions: Choose the word (1), (2), (3), or (4) that best completes each sentence. Then mark the answer on your answer sheet.

- 1- Remember that Instagram is not a good of medical and health-related information.
1) discovery 2) source 3) cause 4) agreement
- 2- Management says that the person who built the building is for the current problems.
1) leading 2) different 3) surprising 4) responsible
- 3- The psychologist told him to on the part of the problem that troubled him.
1) focus 2) solve 3) blame 4) base
- 4- Some of his scenarios are too extreme, but they have the of acknowledging the darkness that lies in all human hearts.
1) dissipation 2) omission 3) advantage 4) flaw
- 5- You can easily some students to a category, and some students belong to several, and some just sit in the back and all you know is their names.
1) assign 2) abdicate 3) rejoice 4) falter
- 6- What aggravated his offense was the attitude he exhibited before the jury in the courtroom.
1) ingenious 2) defiant 3) versatile 4) reverent
- 7- In a video statement, Mr. Comey declared his innocence and welcomed an opportunity to himself in a trial.
1) obviate 2) vindicate 3) repudiate 4) retaliate

PART B: Cloze Test

Directions: Read the following passage and decide which choice (1), (2), (3), or (4) best fits each space. Then mark the correct choice on your answer sheet.

Modern psychologists have many interests,(8) upon different theories and approaches depending on what they are studying. There has been tremendous growth in the topics studied by psychologists(9) developments in computers and data analysis. The American Psychological Association currently has 45 divisions,(10) representing areas of special interest to psychologists.

- 8- 1) drawing 2) that draw 3) draw 4) who draws
- 9- 1) that part is due to 2) of which part due to
3) whose due part into 4) due in part to
- 10- 1) which 2) they 3) each 4) them

PART C: Reading Comprehension

Directions: Read the following three passages and answer the questions by choosing the best choice (1), (2), (3), or (4). Then mark the correct choice on your answer sheet.

PASSAGE 1:

One of the primary reasons that statistics has become of great importance in science and engineering is the knowledge we now have concerning sampling and the conclusions that can be drawn from samples. It is perhaps a curious fact that knowledge about a population or group can be found with great accuracy by examining a sample—only part of the population or group. All introductory courses in statistics discuss simple random sampling. In simple random sampling every item in the population is given an equal chance of occurring in the sample, so every item in the population is treated exactly equally.

It may come as a surprise to learn that simple random sampling can often be improved upon; that is, other sampling procedures may well be more efficient in providing information about the population from which the sample is selected. In these procedures, not all the sampled items are treated equally! In addition to simple random sampling, some courses also discuss stratified sampling and both proportional allocation and optimal allocation within stratified sampling. They often start with a very small example so that ideas become clear.

- 11- The underlined word “curious” in paragraph 1 is closest in meaning to
 - 1) strange
 - 2) perfect
 - 3) direct
 - 4) dependent
- 12- The underlined word “They” in paragraph 2 refers to
 - 1) courses
 - 2) procedures
 - 3) items
 - 4) ideas
- 13- All of the following words are mentioned in the passage EXCEPT
 - 1) concerning
 - 2) choosing
 - 3) discuss
 - 4) efficient
- 14- According to paragraph 2, the procedure known as simple random sampling
 - 1) can often be used to enhance other procedures
 - 2) does not treat all the sampled items equally
 - 3) is sometimes discussed along with other ones
 - 4) is always inefficient in providing information
- 15- According to the passage, which of the following statements is true?
 - 1) The conclusions drawn from samples have contributed to the significance of statistics.
 - 2) A population or group is usually considered only a very insignificant part of a sample.
 - 3) It is very surprising that many courses on statistics start with simple random sampling.
 - 4) Optimal allocation and proportional allocation are examples of simple random sampling.

PASSAGE 2:

Forensic science is a fairly recent arrival in the field of statistical applications. Most of the statistical analyses are carried out by forensic scientists with only a smattering of

statistical knowledge while very few statisticians as yet carry out analyses on forensic science data. One related aspect, though not directly concerned with forensic science, is the controversy surrounding statistics and the law. Lawyers are afraid that statisticians will usurp the role of the judge and jury, sitting as assessors in the courts, weighing up the probabilities and pronouncing a verdict on the basis of their findings. There is much evidence which is not amenable to statistical analysis and never will be. However, there is also much evidence which is suitable and it would be a pity if a lawyer's fear of statistics meant that such evidence was not produced in court.

Returning to the main theme, too often statisticians are seen as enemies of the scientist, ready to do battle and attack all those who dare meddle in their subject and misuse it in so doing. This is far from the truth. Statisticians should be seen, and would like to be seen, as partners of scientists in general and forensic scientists in particular, advising the scientist at each stage of his investigation: in the design of a survey, in the analysis and interpretation of a matching problem, for example, and in the presentation of results for publication or as evidence in a court of law.

- 16- The underlined word “controversy” in paragraph 1 is closest in meaning to
1) commitment 2) expertise
3) intimacy 4) dispute
- 17- According to paragraph 1, the main reason for disapproval of statistics by lawyers is that
1) they fear that statisticians may highlight the role of the judge and jury
2) they are afraid that statisticians will make their own jobs redundant
3) statistics means that much evidence cannot be produced in court
4) they think statisticians might attempt to issue a sentence in the court
- 18- According to paragraph 2, regarding the relationship between statisticians and scientists,
1) both are ready to use the other’s subject and misuse it in so doing
2) the latter are usually thought to be ready to fight for their subject
3) the former are more often than not perceived as foes of the latter
4) statisticians are in general seen as partners of forensic scientists
- 19- According to the passage, which of the following statements is NOT true?
1) Ideally, statisticians are by no means reluctant to be of assistance to forensic scientists in every phase of their investigations.
2) There is almost an equilibrium between the amount of evidence which is not open to statistical analysis and that which is open to it.
3) Up until now, only a limited number of specialists in statistics have undertaken the task of conducting analyses on forensic science data.
4) The majority of statistical analyses in forensics are carried out by only a few scientists with a staggering knowledge of statistics.
- 20- The passage provides sufficient information to answer which of the following questions?
I. What is an example of a verdict pronounced in a court of law?
II. Who first introduced statistical analysis into forensic science?
III. Can the results of forensic studies be exposed to the public?
1) Only I 2) I and II
3) Only III 4) II and III

PASSAGE 3:

Since the 1940s, several factors have reshaped the landscape of statistics, as well as the kinds of histories written about it: the dissemination of mathematical statistics, the changes in the functions and size of statistical offices, and the quantification and mathematization of the social sciences—not to mention the new issues and methods in the history and sociology of science. Even as the traditional genre of national-statistics histories practically vanished, three other genres developed: (1) histories of the mathematization of statistics, often initiated by the protagonists of that process; (2) internal histories of statistical offices, often (but not always) written to celebrate anniversaries; (3) academic, interdisciplinary histories increasingly influenced by the modern sociology of science.

The great mathematicians of the early nineteenth century (Gauss, Laplace, Legendre, and Poisson) formalized the probability calculus and its use in astronomy, without ever referring to “statistics.” [1] The founding fathers of mathematical statistics were the British biometricians Karl Pearson, his son Egon, Ronald Fisher, William Sealy Gosset (better known by his pseudonym of Student), and Udny Yule—as well as the Pole Jerzy Neyman. [2] Often these protagonists wrote the history of their own research and of their antecedents. The first was Karl Pearson (1920; 1978), followed by Egon Pearson, who wrote a biography of his father (1938) and edited collections of historical articles with M. G. Kendall (1970); Kendall later edited another volume of studies with R. L. Plackett (1977). [3] While this historiography has tended toward an ever-greater internalism (a history of formalisms), it has also displayed a broader purpose thanks to Karl Pearson, author of an influential work on the philosophy of science, *The Grammar of Science* (2007). [4]

21- Which of the following techniques is used in paragraph 1?

- | | |
|---------------------|------------------------|
| 1) Humor | 2) Classification |
| 3) Direct quotation | 4) Rhetorical question |

22- According to paragraph 1, the emergence of alternative genres of works on statistics

- 1) was confined to academic, interdisciplinary histories, which increasingly influenced the sphere of modern sociology of science
- 2) coincided with publication of histories of the mathematization of statistics, which were often initiated by the adversaries of that process
- 3) solely provided internal histories of statistical offices, written to celebrate anniversaries to the exclusion of every other occasion
- 4) more or less occurred at the same time as the virtual disappearance of the conventional genre of national-statistics histories

23- According to paragraph 2, all of the following are true EXCEPT that

- 1) Egon Pearson, Ronald Fisher, William Sealy Gosset, Udny Yule, and Jerzy Neyman were among the British biometricians who founded mathematical statistics
- 2) figures such as Gauss and Poisson employed the probability calculus in the study of planetary movements, but never mentioned the term “statistics” in their works
- 3) in a span of time less than a decade, M. G. Kendall acted as the editor of two works on historical studies of statistics in collaboration with Plackett and Egon Pearson
- 4) besides being an influential figure in the development of mathematical statistics, Pearson Sr. also published a seminal work on the philosophy of science

- 24- Which of the following words best describes the author's overall tone in the passage?
 1) Prejudiced 2) Unbiased
 3) Ironic 4) Passionate
- 25- In which position marked by [1], [2], [3] and [4], can the following sentence best be inserted in the passage?
 This larger ambition is conveyed by the title of his collected lectures, 1921- 1933, published in 1978: *The History of Statistics in the 17th and 18th Centuries, against the Changing Background of Intellectual, Scientific and Religious Thought.*
 1) [1] 2) [2] 3) [3] 4) [4]

دروس پایه (ریاضی عمومی (۱ و ۲)، مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی و مبانی احتمال):

۲۶- اگر z_1 و z_2 ریشه‌های معادله $z^2 + z + 1 = 0$ باشند، آنگاه مقدار $z_1^{405} + z_2^{405}$ کدام است؟

(۱) -۱

(۲) $-\frac{1}{2}$

(۳) $\frac{1}{2}$

(۴) ۱

۲۷- مقدار $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^x - [2x^x]}{4x^x - [x]^x}$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) $\frac{5}{4}$

(۴) $\frac{4}{3}$

۲۸- فرض کنید به‌ازای $a \geq 0$ داشته باشیم: $a_n = \sqrt{a} \sqrt[4]{a} \sqrt[8]{a} \dots \sqrt[2^n]{a}$. به‌ازای کدام مقادیر a دنباله $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا است؟

(۱) تنها به‌ازای $a = 0, 1$

(۲) به‌ازای تمام مقادیر $0 \leq a \leq 1$

(۳) به‌ازای تمام مقادیر $a \geq 0, a \neq 0$

(۴) به‌ازای تمام مقادیر $a \geq 0$

۲۹- فرض کنید f یک تابع مشتق‌پذیر باشد و $f(0) = f(1) = \pi$. اگر $g(x) = \cos(f(x))$ ، آنگاه کدام مورد درست است؟

(۱) تابع g' فقط یک ریشه حقیقی دارد.

(۲) تابع g' دقیقاً دو ریشه حقیقی دارد.

(۳) تابع g' حداقل سه ریشه حقیقی متمایز دارد.

(۴) تابع g' حداکثر سه ریشه حقیقی متمایز دارد.

۳۰- فرض کنید $f(t) = \min\{1, t^2\}$ و $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. کدام مورد درست است؟

$$(1) F(x) = \frac{x^3}{3}, (x \geq 0)$$

$$(2) F(x) = x - \frac{2}{3}\left(\frac{x}{|x|}\right), (x > 0)$$

$$(3) F(x) = \begin{cases} \frac{-x^3}{3} & |x| \leq 1 \\ \frac{2}{3}\left(\frac{x}{|x|}\right) - x & |x| > 1 \end{cases}$$

$$(4) F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} & |x| \leq 1 \\ x - \frac{2}{3}\left(\frac{x}{|x|}\right) & |x| > 1 \end{cases}$$

۳۱- فرض کنید $a, b > 0$ و γ منحنی فصل مشترک $2y - x - z = 0$ و $\left(\frac{z-x}{2b}\right)^2 + \left(\frac{z+x}{2a}\right)^2 = 1$ باشد. مقدار تاب

γ در نقطه (a, a, a) کدام است؟

(۱) صفر

$$(2) \frac{a+b}{2}$$

$$(3) \frac{ab}{2}$$

$$(4) ab$$

۳۲- نوع نقطه $(1, 1)$ برای تابع $f(x, y) = xy(2x + 2y - xy - 4)$ ، کدام است؟

(۱) نقطه بحرانی نیست.

(۲) زینی

(۳) مینیمم نسبی

(۴) ماکزیمم نسبی

۳۳- اگر $\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ، آنگاه مقدار $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-2x^2-2y^2} dy dx$ کدام است؟

$$(1) \frac{\pi\sqrt{e}}{6}$$

$$(2) \frac{\pi\sqrt{e}}{24}$$

$$(3) \frac{\sqrt{e}\pi}{6}$$

$$(4) \frac{\sqrt{e}\pi}{12}$$

۳۴- مساحت بخشی از کره $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ که درون مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ قرار دارد، کدام است؟

(۱) $3\pi(2 - \sqrt{2})$

(۲) $3\pi(\sqrt{2} - 1)$

(۳) $\sqrt{3}\pi(2 - \sqrt{2})$

(۴) $\sqrt{3}\pi(\sqrt{2} - 1)$

۳۵- فرض کنید مساحت سطح زیر نمودار منحنی C و بالای محور x (مطابق شکل) برابر a است. مقدار $\int_C -y dx + x dy$

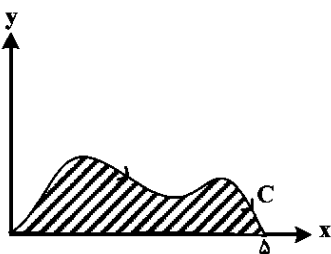
کدام است؟

(۱) ۵a

(۲) ۲a

(۳) صفر

(۴) -۲a



۳۶- اگر بردارهای $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} x \\ 1 \\ -x \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2x \\ 3x+1 \end{bmatrix}$ از یک فضای برداری روی میدان اعداد حقیقی، مستقل

خطی باشند، آنگاه مقدار x می‌تواند...

(۱) هر عدد حقیقی باشد.

(۲) هر عدد حقیقی باشد به جز $-\frac{1}{3}$

(۳) هر عدد حقیقی باشد به جز -۱

(۴) هر عدد حقیقی باشد به جز -۱ و $-\frac{1}{3}$

۳۷- اگر A و B ماتریس‌هایی 2×2 با درایه‌های حقیقی باشند، به‌طوری‌که $(AB)^2 = 0$ ، که در آن ۰ ماتریس صفر 2×2 می‌باشد، آنگاه کدام مورد درست است؟

(۱) $\det(BA)^2 \neq 0$

(۲) $(BA)^2 = 0$

(۳) $(BA)^2 B \neq A(BA)^2$

(۴) $\text{tr}(BA)^2 \neq 0$

۳۸- فرض کنید A یک ماتریس 2×2 با درایه‌های حقیقی باشد. اگر رتبه‌ی ستونی A برابر با ۱ باشد و $\text{tr}(A) = 5$ ،

آنگاه $\text{tr}(A^2)$ برابر است با

(۱) ۵

(۲) ۲۵

(۳) ۱۲۵

(۴) ۶۲۵

۳۹- برای اعداد مثبت x و y و z حاصل دترمینان

$$\begin{vmatrix} 1 & \log_y x & \log_z x \\ \log_x y & 3 & \log_z y \\ \log_x z & \log_y z & 5 \end{vmatrix}$$

برابر است با

(۱) صفر

(۲) ۱۵

(۳) ۸

(۴) $\log_x \log_y \log_z$

۴۰- اگر A و B ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌های حقیقی باشند و چنانچه ماتریس A وارون‌پذیر (نامنفرد) باشد، آنگاه کدام مورد نادرست است؟

(۱) ماتریس‌های $(A^{-1}B)^2$ و $(BA^{-1})^2$ مقادیر ویژه یکسان ندارند.

(۲) ماتریس‌های $A^{-1}B$ و BA^{-1} مقادیر ویژه یکسان دارند.

(۳) ماتریس‌های B و $A^{-1}BA$ مقادیر ویژه یکسان دارند.

(۴) ماتریس‌های AB و BA رتبه یکسان دارند.

۴۱- فرض کنید $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله از اعداد حقیقی مثبت باشند. از کدام مورد همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نتیجه می‌شود؟

(۱) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \in \mathbb{R}$

(۲) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} \in \mathbb{R}$ و سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا است.

(۳) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \in \mathbb{R}$

(۴) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \infty$ و سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا است.

۴۲- فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی است، $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ ، $\alpha = \sup A$ و $\beta = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ که

$\alpha, \beta \in (-\infty, \infty]$ کدام مورد نادرست است؟

(۱) اگر $\alpha \notin A$ ، آنگاه $\alpha = \beta$.

(۲) اگر $\{a_n\}$ صعودی باشد، آنگاه $\alpha = \beta$.

(۳) اگر $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ، آنگاه $(\beta, \alpha) \cap A$ مجموعه‌ای متناهی است.

(۴) اگر $\alpha = \beta$ ، آنگاه $\{a_n\}$ دارای زیردنباله‌ای صعودی است.

۴۳- فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد مثبت متمایز باشد که سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا و $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ حاصل جمع جزئی

سری است. کدام مورد درست است؟

(۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$ واگرا است ولی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n^2}$ همگرا است.

(۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$ همگرا است ولی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n^2}$ واگرا است.

(۳) هر دو سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n^2}$ همگرا است.

(۴) هر دو سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n^2}$ واگرا است.

۴۴- کدام مورد درباره تابع حقیقی f درست است؟

(۱) اگر f بر $\mathbb{R}$ پیوسته و کراندار باشد، آنگاه f بر $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

(۲) اگر f بر $[1, \infty)$ پیوسته و یکنوا باشد، آنگاه تابع $g(x) = xf(x)$ بر $[1, \infty)$ یکنواخت پیوسته است.

(۳) اگر f بر بازه باز و کراندار (a, b) پیوسته و کراندار باشد، آنگاه f بر (a, b) یکنواخت پیوسته است.

(۴) اگر تابع f بر $[1, \infty)$ پیوسته و کراندار باشد، آنگاه تابع $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ بر $[1, \infty)$ یکنواخت پیوسته است.

۴۵- اگر $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته باشد، کدام مورد درست است؟

(۱) اگر $E \subseteq \mathbb{R}$ کراندار باشد، آنگاه $\overline{f(E)}$ فشرده است.

(۲) اگر $E \subseteq \mathbb{R}$ همبند و بسته باشد، آنگاه $\overline{f(E)}$ فشرده است.

(۳) اگر $E \subseteq \mathbb{R}$ همبند نباشد، آنگاه $f(E)$ نیز همبند نیست.

(۴) اگر $E \subseteq \mathbb{R}$ فشرده نباشد، آنگاه $f(E)$ نیز فشرده نیست.

۴۶- در جعبه‌ای ۳ مهره سفید و همچنین ۳ مهره سیاه قرار دارند. مهره‌ها را یک‌به‌یک و بدون جای‌گذاری انتخاب می‌کنیم تا

همه مهره‌های هم‌رنگ سیاه یا همه مهره‌های هم‌رنگ سفید انتخاب شوند. احتمال این که این رویداد در انتخاب چهارم رخ

دهد، چقدر است؟

(۱) $\frac{2}{10}$

(۲) $\frac{3}{10}$

(۳) $\frac{4}{10}$

(۴) $\frac{1}{10}$

۴۷- کارگری در سه شیفت کاری مختلف به ترتیب ۲۰ و ۱۵ و ۳۰ قطعه در ساعت تولید می‌کند. اگر زمان کاری هر سه شیفت برابر باشد، میانگین تولید ساعتی این کارگر چقدر است؟

(۱) ۲۲

(۲) ۲۰/۶۷

(۳) ۲۰

(۴) ۲۱/۶۷

۴۸- فرض کنید $P(A) = P(B) = ۰/۶$ و $P(A|B) = ۰/۸$ باشد. مقدار $P(A|B')$ کدام است؟

(۱) ۰/۱۲

(۲) ۰/۳

(۳) ۰/۴۸

(۴) ۰/۷

۴۹- روز تولد مینا ۲۱ مهر است. احتمال این که چهارمین نفر که مینا در مدرسه با او ملاقات می‌کند، نخستین نفری باشد که تولدش ۲۱ مهر است، چقدر است؟ (تعداد روزهای سال را ۳۶۵ روز بگیرید، شانس تولد در روزهای مختلف سال برای همه یکسان است.)

(۱) $\frac{(۳۶۴)^۳}{(۳۶۵)^۴}$

(۲) $\left(\frac{۳۶۴}{۳۶۵}\right)^۴$

(۳) $\left(\frac{۳۶۴}{۳۶۵}\right)^۳$

(۴) $\frac{(۳۶۴)^۳ ۳۶۳}{(۳۶۵)^۴}$

۵۰- اگر در یک مجموعه داده، میانگین و میانه با هم برابر باشند، کدام مورد همواره درست است؟

(۱) مد داده‌ها نیز حتماً با میانگین و میانه برابر است. (۲) داده‌ها دارای چولگی به چپ (منفی) هستند.

(۳) داده‌ها دارای چولگی به راست (مثبت) هستند. (۴) ضریب چولگی صفر است.

دروس تخصصی ۱ (احتمال ۱ و ۲)، آمار ریاضی (۱ و ۲):

۵۱- از جعبه‌ای که ۳ مهره سیاه و ۴ مهره سفید دارد، مهره به‌طور تصادفی و با جایگذاری برمی‌داریم تا برای اولین بار سفید انتخاب شود. احتمال اینکه تعداد دفعات لازم برای انتخاب مهره تا مشاهده اولین مهره سفید عددی فرد باشد، چقدر است؟

(۱) $\frac{۳}{۱۰}$

(۲) $\frac{۴}{۱۰}$

(۳) $\frac{۷}{۱۰}$

(۴) $\frac{۹}{۱۰}$

۵۲- فرض کنید X دارای توزیع تجمعی $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$ باشد. مقدار $E[F^2(X)(1-F(X))^3]$ چقدر است؟

$$(1) \frac{1}{100}$$

$$(2) \frac{1}{30}$$

$$(3) \frac{1}{60}$$

$$(4) \frac{1}{50}$$

۵۳- متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال زیر است که در آن $0 \leq \theta \leq 1$ است. کمترین مقدار واریانس به ازای چه

مقداری از θ حاصل می‌شود؟

x	-1	0	1
$P(X=x)$	$\frac{\theta}{2}$	$1-\theta$	$\frac{\theta}{2}$

$$(1) \frac{1}{4}$$

$$(2) \frac{1}{2}$$

$$(3) \frac{3}{4}$$

$$(4) 1$$

۵۴- اگر X یک متغیر تصادفی گسسته با مقادیر صحیح نامنفی و تابع مولد احتمال آن به صورت $G(t) = \frac{4}{4-t}$ باشد،

مقدار $P(X=1)$ چقدر است؟

$$(1) \frac{3}{4}$$

$$(2) \frac{2}{3}$$

$$(3) \frac{1}{3}$$

$$(4) \frac{1}{4}$$

۵۵- فرض کنید X یک متغیر تصادفی نرمال با میانگین μ و واریانس $\sigma^2 = 3$ باشد. اگر $E(e^X) = 1$ باشد مقدار μ کدام است؟

$$(1) -3$$

$$(2) -\frac{3}{2}$$

$$(3) -\frac{1}{2}$$

$$(4) -1$$

۵۶- فرض کنید $X \sim N(0, 3)$ باشد. مقدار $E(X^2 e^{X^2})$ کدام است؟

(۱) صفر

(۲) -۱

(۳) ۱

(۴) وجود ندارد.

۵۷- تعداد ماهی‌ها در یک دریاچه مشخص یک متغیر تصادفی پواسون با پارامتر λ است. برای اطمینان از وجود

ماهی، یک ماهی به دریاچه اضافه می‌کنیم. فرض کنید Y تعداد ماهی‌های حاصل شده باشد. $E(Y^2)$ کدام است؟

(۱) $\frac{\lambda^2}{2}$

(۲) $(\lambda + 1)^2$

(۳) $\lambda^2 + 2\lambda$

(۴) $\lambda^2 + 3\lambda + 1$

۵۸- فرض کنید $X \sim U(0, 1)$ ، واریانس $Y = \ln \sqrt{\frac{1}{1-X}}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{8}$

(۲) $\frac{1}{6}$

(۳) $\frac{1}{4}$

(۴) $\frac{1}{2}$

۵۹- مصرف روزانه آب (برحسب میلیون لیتر) در یک شهر، یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمالی زیر است.

احتمال اینکه در روز مشخصی، مصرف آب بیش از ۷ میلیون لیتر شود، چقدر است؟

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x-5) & 5 \leq x < 6 \\ \frac{1}{3}(8-x) & 6 \leq x < 8 \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

(۱) $\frac{1}{6}$

(۲) $\frac{1}{3}$

(۳) $\frac{2}{3}$

(۴) $\frac{5}{6}$

۶۰- فرض کنید دنباله X_n از متغیرهای تصادفی مستقل دارای توزیع دو جمله‌ای $\text{Bin}(n, \frac{1}{n})$ باشد. مقدار

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(e^{-X_n}) \text{ کدام است؟}$$

$$e^{-1} \quad (1)$$

$$e^{-2} \quad (2)$$

$$e^{e^{-1}-1} \quad (3)$$

$$e^{e^{-1}} \quad (4)$$

۶۱- فرض کنید (X, Y) دارای چگالی توأم زیر باشد. میانه متغیر تصادفی Y چقدر است؟

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1, \quad x < y < 1+x \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$1 \quad (2)$$

$$\frac{3}{2} \quad (3)$$

$$2 \quad (4)$$

۶۲- فرض کنید X دارای توزیع پواسون با پارامتر $\lambda = 2$ و $y = 0, 1, \dots, x$ $E[Y] \cdot P(Y = y | X = x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & y = 0, 1, \dots, x \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$

کدام است؟

$$1 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} \quad (3)$$

$$\frac{1}{4} \quad (4)$$

۶۳- فرض کنید $X + Y = 4X - 3$ ، ضریب همبستگی X و Y چقدر است؟

$$-1 \quad (1)$$

$$-\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$+\frac{1}{3} \quad (3)$$

$$+1 \quad (4)$$

۶۴- فرض کنید $X \sim \text{Bin}(n, \frac{1}{p})$ ، $n \geq 2$ باشد، کدام نابرابری همواره درست است؟

$$\begin{aligned} E\left[\frac{\frac{X}{n}}{1 - \frac{X}{n}}\right] &\leq \frac{1}{3} \quad (۲) & E\left[\frac{\frac{X}{n}}{1 - \frac{X}{n}}\right] &\geq \frac{1}{3} \quad (۱) \\ E\left[\frac{\frac{X}{n}}{1 - \frac{X}{n}}\right] &\leq \frac{1}{n-1} \quad (۴) & E\left[\frac{\frac{X}{n}}{1 - \frac{X}{n}}\right] &\geq \frac{1}{n-1} \quad (۳) \end{aligned}$$

۶۵- اگر X_1 و X_2 دو متغیر تصادفی مستقل دارای توزیع نمایی با میانگین $\frac{1}{p}$ باشند، مقدار $E\left(\frac{X_1 + 3X_2}{5X_1 + 5X_2}\right)$ کدام است؟

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} &\quad (۱) \\ \frac{2}{5} &\quad (۲) \\ \frac{3}{5} &\quad (۳) \\ \frac{4}{5} &\quad (۴) \end{aligned}$$

۶۶- فرض کنید $X \sim \text{Bin}(n, \frac{1}{p})$ و $Y \sim \text{Bin}(n+1, \frac{1}{p})$ و مستقل از یکدیگر باشند. قرار دهید $V = \min(X, Y)$ و

$W = \max(X, Y)$. در این صورت کدام گزینه درست است؟

$$\begin{aligned} E|X - Y| &= \frac{E(W) - E(V)}{2} \quad (۱) \\ E|X - Y| &= E(W) + E(V) \quad (۲) \\ E|X - Y| &= \frac{E(W) + E(V)}{2} \quad (۳) \\ E|X - Y| &= E(W) - E(V) \quad (۴) \end{aligned}$$

۶۷- فرض کنید تابع چگالی تک مشاهده X به صورت زیر است:

$$g_\theta(x) = \theta f_1(x) + (1-\theta)f_2(x), \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

که $f_1(x)$ و $f_2(x)$ دو تابع چگالی معلوم در R هستند و θ پارامتر مجهول است. خانواده توزیع‌های X دارای خاصیت MLR در چه آماره‌ای است؟

$$\begin{aligned} f_2(x) - f_1(x) &\quad (۱) \\ \frac{f_1(x)}{f_2(x)} &\quad (۲) \\ f_1(x)f_2(x) &\quad (۳) \\ f_1(x) + f_2(x) &\quad (۴) \end{aligned}$$

۶۸- فرض کنید X دارای توزیع نمایی با میانگین θ باشد. برای آزمون فرض $\begin{cases} H_0: \theta = 200 \\ H_1: \theta = 300 \end{cases}$ ، اگر خطای نوع اول برابر

e^{-2} باشد، ناحیه بحرانی کدام است؟

(۱) $X > 250$

(۲) $X > 300$

(۳) $X > 400$

(۴) $X > 450$

۶۹- فرض کنید Y_1 و Y_2 متغیرهای تصادفی مستقل از هم با توزیع یکسان $U(0, \theta)$ باشند. برای آزمون $H_0: \theta = 1$ در برابر $H_1: \theta > 1$ ناحیه رد H_0 را به صورت $\max\{Y_1, Y_2\} > c$ در نظر بگیرید. توان این آزمون (به عنوان تابعی از θ و c) چقدر است؟

(۱) $1 - \frac{c^2}{\theta^2}$

(۲) $\frac{c^2}{\theta^2}$

(۳) $1 - \frac{c}{\theta}$

(۴) $\frac{c}{\theta}$

۷۰- اگر $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از چگالی $0 < x < \theta, \theta > 0$ ، $f(x; \theta) = \frac{2x}{\theta^2}$ و $Y = \max(X_1, \dots, X_n)$ مقدار ثابت c چند باشد تا (cY, ∞) یک فاصله اطمینان $100(1 - \alpha)\%$ برای θ باشد؟

(۱) $\sqrt[n]{1 - \alpha}$

(۲) $\sqrt[n]{1 - \alpha}$

(۳) $\frac{1}{\sqrt[n]{1 - \alpha}}$

(۴) $\frac{1}{\sqrt[n]{1 - \alpha}}$

۷۱- فرض کنید $0 < x < 1$ ، $H_0: X \sim f(x) = 3x^2$ و $H_1: X \sim U(0, 1)$. پرتوان ترین آزمون در اندازه α کدام است؟

(۱) $x < \sqrt[3]{\alpha}$

(۲) $x > \sqrt[3]{\alpha}$

(۳) $x < \sqrt[3]{1 - \alpha}$

(۴) $x > \sqrt[3]{1 - \alpha}$

۷۲- فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی از تابع چگالی $f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)}{\sigma}}$ که در آن μ و σ

هر دو نامعلوم باشند. ناحیه رد آزمون GLR برای آزمون فرض $H_0: \mu = 0$ در برابر $H_1: \mu \neq 0$ با $\alpha = 0.05$ کدام است؟

$$\frac{X_{(1)}}{\sum X_i} \geq \sqrt[3]{0.05} \quad (1)$$

$$X_{(1)} > (0.05)^{\frac{1}{n(n-1)}} \quad (2)$$

$$\sum X_i \geq 1 - \sqrt[3]{0.05} \quad (3)$$

$$\frac{X_{(1)}}{\sum X_i} > (0.05)^{\frac{1}{n(n-1)}} \quad (4)$$

۷۳- اگر $X_i \sim N(\theta, \theta^2)$, $i = 1, 2, \dots, n$. آماره بسنده برای θ چیست؟

$$S^2 \quad (1)$$

$$\frac{\bar{X}}{S} \quad (2)$$

$$(\bar{X}, S^2) \quad (3)$$

$$(\bar{X}^2, S^2) \quad (4)$$

۷۴- اگر $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $U(\theta, 2\theta)$ باشد. برآوردگر نأریب θ چیست؟

$$(X_{(n)} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i \text{ و } X_{(1)} = \min_{1 \leq i \leq n} X_i)$$

$$\frac{n+1}{n-1}(X_{(n)} - 1) \quad (1)$$

$$X_{(1)} - 1 \quad (2)$$

$$X_{(n)} - X_{(1)} \quad (3)$$

$$\frac{n+1}{n-1}(X_{(n)} - X_{(1)}) \quad (4)$$

۷۵- اگر X_1, X_2, X_3 دارای توزیع برنولی با پارامتر p باشند، کدامیک از آماره‌های زیر بسنده نیست؟

$$X_1 + X_2 + X_3 \quad (1)$$

$$X_1 + X_2 + 2X_3 \quad (2)$$

$$X_1 + X_2 + 7X_3 \quad (3)$$

$$3 - (X_1 + X_2 + X_3) \quad (4)$$

۷۶- فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد. برآوردگر گشتاوری θ کدام است؟

$$f_{\theta}(x) = \frac{1}{2\theta} e^{-\frac{|x|}{\theta}} \quad -\infty < x < +\infty, \quad \theta > 0$$

$$\bar{X} \quad (1)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n |X_i|}{n} \quad (2)$$

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{2n}} \quad (3)$$

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}} \quad (4)$$

۷۷- فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی از $U(0, \theta)$ باشد. UMVUE برای e^{θ} کدام است؟

$$e^{X(n)} \quad (1)$$

$$\frac{1}{n} e^{\bar{X}} \quad (2)$$

$$X_{(n)} e^{\frac{1}{n} X(n)} \quad (3)$$

$$\left(1 + \frac{X(n)}{n}\right) e^{X(n)} \quad (4)$$

۷۸- با استفاده از یک نمونه n تایی از تابع چگالی احتمال $f(x; \theta) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$ ، کاراترین برآوردگر برای

میانه توزیع چیست؟

$$(\ln 2) \bar{X} \quad (1)$$

$$\frac{\bar{X}}{\ln 2} \quad (2)$$

$$2\bar{X} \quad (3)$$

$$\frac{2}{\bar{X}} \quad (4)$$

۷۹- فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $N(\mu, 1)$ باشد. کران پایین کرامر - رانو برای برآورد ناآریب $P(X_1 > 2\mu)$ کدام است؟

$$2\pi e^{-\mu} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2n\pi} e^{-\mu} \quad (2)$$

$$2\pi e^{-\mu^2} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2\pi n} e^{-\mu^2} \quad (4)$$

۸۰- فرض کنید جمعیتی مانند X دارای تابع چگالی احتمال به صورت زیر باشد. نمونه‌ی $\{0/8, 1/6, 0/9\}$ از این جمعیت گرفته شده است. بر آورد ماکسیمم درست‌نمایی θ کدام است؟

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} \theta & 0 < x < 1, \\ 1-\theta & 1 \leq x < 2, \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad 0 < \theta < 1$$

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{2}{3} \quad (2)$$

$$\frac{3}{4} \quad (3)$$

$$\frac{3}{5} \quad (4)$$

۸۱- فرض کنید $X = x$ یک تک مشاهده از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد. بر آوردگر ماکسیمم درست‌نمایی θ کدام است؟

$$g_{\theta}(x) = \theta e^{-x} + 2(1-\theta) e^{-2x}, \quad 0 < \theta < 1$$

$$\hat{\theta} = \begin{cases} 1 & x < e^{-2} \\ 0 & x > e^{-2} \end{cases} \quad (1)$$

$$\hat{\theta} = \begin{cases} 1 & x > \ln 2 \\ 0 & x < \ln 2 \end{cases} \quad (2)$$

$$\hat{\theta} = \begin{cases} 1 & x > e^{-2} \\ 0 & x < e^{-2} \end{cases} \quad (3)$$

$$\hat{\theta} = \begin{cases} 1 & x < \ln 2 \\ 0 & x > \ln 2 \end{cases} \quad (4)$$

۸۲- اگر $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع نمایی با میانگین θ باشد، $E\left(\frac{X_{(1)}}{\bar{X}}\right)$ کدام است؟

$$\frac{1}{n(n-1)+1} \quad (1)$$

$$\frac{1}{n} \quad (2)$$

$$\frac{n}{n(n-1)+1} \quad (3)$$

$$1 - \frac{1}{n} \quad (4)$$

دروس تخصصی ۲ (نمونه‌گیری (۱ و ۲)، رگرسیون (۱):

۸۳- در نمونه‌گیری طبقه‌ای، برای تخصیص حجم نمونه بین طبقات، وقتی تخصیص نیمین و تخصیص متناسب نتیجه یکسانی دارند که

(۱) واریانس طبقات با هم یکسان باشند. (۲) حجم طبقات با هم برابر باشند.

(۳) میانگین طبقات با هم یکسان باشند. (۴) هم میانگین و هم واریانس طبقات با هم یکسان باشند.

۸۴- مدیریت یک مهمانسرای بزرگ شامل ۱۰۰۰ مهمان، می‌خواهد نسبت افراد بالای ۱۸ سال ساکن در مهمانسرا را برآورد کند. وی از بین ۲۴۰ اتاق به‌طور تصادفی ساده ۴ اتاق را انتخاب نموده و سن همه افراد هر اتاق منتخب را سؤال می‌کند. براساس داده‌های جدول زیر برآورد نأریب نسبت مورد نظر کدام مورد است؟

شماره اتاق نمونه	۱	۲	۳	۴
تعداد افراد اتاق	۲	۶	۴	۶
افراد بالای ۱۸ سال	۱	۴	۰	۵

(۱) ۰/۵

(۲) $\frac{5}{9}$

(۳) ۰/۶

(۴) $\frac{4}{9}$

۸۵- اگر برای برآورد میانگین جامعه، اعضاء نمونه در نمونه‌گیری طبقه‌ای به حجم $n = \sum_{h=1}^L n_h$ دقیقاً همان اعضاء نمونه در نمونه‌گیری تصادفی ساده، به حجم n باشد، آنگاه برآورد میانگین جامعه در این دو طرح نمونه‌گیری برابر خواهد بود، هرگاه،

(۱) حجم و واریانس نمونه در طبقات با هم برابر باشند.

(۲) طبقات جامعه دارای حجم‌های برابر بوده و میانگین طبقات در جامعه یکسان باشند.

(۳) از تخصیص مساوی استفاده شود.

(۴) از تخصیص متناسب استفاده شود.

۸۶- مزرعه‌ای دارای ۵۰ مزرعه گندم است. برای برآورد مقدار کل سطح زیرکشت این محصول، ۵ مزرعه را به تصادف و بدون جایگذاری انتخاب کرده‌ایم، اگر y_i سطح زیرکشت گندم مزرعه i ام نمونه برحسب هکتار باشد،

$$\sum_{i=1}^5 y_i = 10 \text{ و } \sum_{i=1}^5 y_i^2 = 26, \text{ واریانس برآوردگر را چقدر برآورد می‌کنید؟}$$

(۱) ۵۷۰

(۲) ۵۷۶

(۳) ۶۷۵

(۴) ۷۵۰

۸۷- در نمونه‌گیری تصادفی ساده به اندازه ۱۳ از جامعه‌ای ۴۰ عضوی، چقدر احتمال دارد دو واحد اول و آخر جامعه به‌طور همزمان در نمونه قرار نگیرند؟

(۱) ۰/۹

(۲) $\frac{4}{13}$

(۳) $\frac{9}{13}$

(۴) $\frac{27}{40}$

- ۸۸- میانگین معمولی یک نمونه تصادفی ساده با جایگذاری به حجم m از جامعه‌ای به حجم N چه زمانی با میانگین معمولی یک نمونه تصادفی ساده بدون جایگذاری به حجم نصف جامعه، دقت برابر دارد؟

$$(1) \quad m = \frac{N}{2} + 1$$

$$(2) \quad m = N - 1$$

(۳) به واریانس جامعه بستگی دارد.

(۴) همواره نمونه‌گیری تصادفی ساده بدون جایگذاری کارآمدتر است.

- ۸۹- برای برآورد نسبت دانشجویان بومی در دانشگاهی با ۳۰ هزار دانشجو، در یک نمونه اولیه هزارتایی این نسبت را ۵/۴ به دست آورده‌ایم، اگر بخواهیم کران خطای نسبی برآورد با اطمینان ۹۵ درصد ۵/۰۲ باشد، چند دانشجوی دیگر را باید نمونه بگیریم؟ ($Z_{0.975} = 2$)

$$(1) \quad 1525$$

$$(2) \quad 1825$$

$$(3) \quad 9000$$

$$(4) \quad 15000$$

- ۹۰- در نمونه‌گیری تصادفی ساده بدون جایگذاری به حجم n از جامعه‌ای متناهی، اگر ۲۰ درصد به حجم نمونه اضافه کنیم، کارایی برآوردگر میانگین نمونه دو برابر شود، در این صورت کسر نمونه‌گیری اولیه کدام است؟

$$(1) \quad \frac{1}{2}$$

$$(2) \quad \frac{2}{3}$$

$$(3) \quad \frac{4}{5}$$

$$(4) \quad \frac{6}{7}$$

- ۹۱- جامعه‌ای به حجم ۱۲۰۰ نفر شامل ۴۰۰ مرد و ۸۰۰ زن است. واریانس صفت Y در مردان ۴۰۰ و در زنان ۱۰۰ است. براساس تخصیص نیم، نمونه‌ای ۶۰ تایی از این جامعه، چند مرد و چند زن را شامل می‌شود؟

$$(1) \quad 40 \text{ مرد و } 20 \text{ زن}$$

$$(2) \quad 30 \text{ مرد و } 30 \text{ زن}$$

$$(3) \quad 25 \text{ مرد و } 35 \text{ زن}$$

$$(4) \quad 20 \text{ مرد و } 40 \text{ زن}$$

- ۹۲- در یک جامعه با خوشه‌های با اندازه برابر ۱۰، واریانس درون خوشه‌ای ۷۵ درصد واریانس کل جامعه است. در این صورت ضریب همبستگی خوشه‌ای کدام است؟

$$(1) \quad \frac{2}{3}$$

$$(2) \quad \frac{1}{2}$$

$$(3) \quad \frac{1}{4}$$

$$(4) \quad \frac{1}{6}$$

۹۳- برای برآورد میانگین سن درختان سیب یک باغ، می‌دانیم متوسط ارتفاع کل درختان سیب این باغ ۴ متر است. در یک نمونه ۳ تائی از این درختان نتایج جدول زیر حاصل شده است. برآورد رگرسیونی کدام است؟

سن درخت (سال)	۳	۴	۵
ارتفاع درخت (متر)	۴	۴	۷

(۱) سه سال و شش ماه

(۲) چهار سال و دو ماه

(۳) سه سال و پنج ماه

(۴) چهار سال و شش ماه

۹۴- نمونه‌گیری خوشه‌ای یک مرحله‌ای به روش تصادفی ساده چه زمانی دارای بیشترین کارایی در برآورد میانگین کل جامعه است؟

(۱) میانگین مقادیر متغیر تحت مطالعه درون خوشه‌ها با یکدیگر برابر باشند.

(۲) مجموع مقادیر متغیر تحت مطالعه درون خوشه‌ها با یکدیگر برابر باشند.

(۳) واریانس درون خوشه‌ای بزرگ‌تر از واریانس بین خوشه‌ای باشد.

(۴) ضریب همبستگی خوشه‌ای منفی باشد.

۹۵- در برازش مدل کامل رگرسیون چندگانه $F: y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_p x_p + \varepsilon_1$ و مدل کاهش یافته $R: y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k + \varepsilon_2 (k < p)$ اگر مجموع توان‌های دوم خطا به ترتیب $SSE(F)$ و $SSE(R)$ باشند، رابطه صحیح بین $SSE(R)$ و $SSE(F)$ کدام گزینه است؟

$$(۱) SSE(R) = SSE(F)$$

$$(۲) SSE(R) \geq SSE(F)$$

$$(۳) SSE(R) < SSE(F)$$

$$(۴) (k-1) SSE(F) = (p-1) SSE(R)$$

۹۶- مدل رگرسیون $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \varepsilon$ را در نظر بگیرید: که در آن $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 | x_1)$. برای تشخیص وابستگی واریانس y به x_1 از کدام نمودار زیر استفاده می‌کنیم؟ $(e = y - \hat{y})$

(۱) نمودار پراکنش (x_1, e)

(۲) نمودار پراکنش (x_1, y)

(۳) نمودار پراکنش $(\hat{y}, e)$

(۴) نمودار پراکنش (y, e)

۹۷- مدل رگرسیون خطی ساده $y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$ را براساس n زوج مشاهده به روش کمترین توان‌های دوم برازش داده‌ایم. پس از انجام محاسبات دریافته‌ایم که زوج مشاهده $\{(x, y) = (\bar{x}, \bar{y})\}$ اشتباهاً در محاسبات در نظر گرفته شده‌اند. چنانچه محاسبات با حذف این مشاهده تصحیح گردد، کدام مورد تغییر می‌کند؟

$$(۱) S_{yy}$$

$$(۲) SSE$$

$$(۳) R^2$$

$$(۴) R_{adj}^2$$

۹۸- مدل رگرسیون خطی ساده $y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$ (با فرض ناهمبسته بودن و هم توزیع بودن جملات خطا) را بر اساس

مشاهدات $x = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{10 \text{ تا}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{30 \text{ تا}} \right\}$ در نظر بگیرید. اگر $\text{Var}(\hat{\beta}_0) = 0.3$ باشد، مقدار MSE کدام گزینه است؟

$$\frac{30}{4} \quad (1)$$

$$3 \quad (2)$$

$$3/5 \quad (3)$$

$$114 \quad (4)$$

۹۹- مدل رگرسیون خطی p متغیره $y = X_{n \times p} \beta_{p \times 1} + \varepsilon$ بر اساس n مشاهده را با فرض ناهمبسته بودن و هم واریانس بودن

جملات خطا یعنی $\text{Var}(\varepsilon) = \sigma^2 I_n$ در نظر بگیرید که در آن I_n ماتریس همانی با مرتبه n است. اگر مدل مذکور را با روش کمترین توان‌های دوم برآورد کرده و بردار باقی‌مانده‌های مدل برازش یافته را به شکل $e = y - \hat{y}$ در نظر بگیریم، مقدار $\text{Cov}(\hat{\beta}, e)$ کدام است؟

$$0_{n \times n} \quad (1)$$

$$0_{p \times p} \quad (2)$$

$$0_{p \times n} \quad (3)$$

$$s^2 (XX')^{-1} \quad (4)$$

۱۰۰- مدل رگرسیون خطی $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$ را بر اساس n مشاهده به روش کمترین توان‌های دوم برازش

داده و مقدار ضریب تعیین مدل برابر با ۸۰ درصد به دست آمده است. همچنین با برازش متغیرهای مستقل روی هم به روش کمترین توان‌های دوم توابع $\hat{X}_1 = 2 + 3X_2$ و $\hat{X}_2 = -0.6 + 0.3X_1$ حاصل گردید. کدام گزینه در خصوص عامل تورم واریانس (VIF) متغیرهای مستقل درست است؟ (به طوری که

$$\text{VIF}(X_1) = \text{VIF}(X_2) = \frac{1}{1 - r_{12}^2}$$

$$\text{VIF}(X_1) = 5, \text{VIF}(X_2) = 10 \quad (1)$$

$$\text{VIF}(X_1) = 10, \text{VIF}(X_2) = 5 \quad (2)$$

$$\text{VIF}(X_1) = \text{VIF}(X_2) = 5 \quad (3)$$

$$\text{VIF}(X_1) = \text{VIF}(X_2) = 10 \quad (4)$$

۱۰۱- در برازش مدل رگرسیون $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon$ ، اگر $R = 0.60$ و $n = 19$ باشد، برای آزمون فرض

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = 0 \text{ در مقابل } H_1: \sim H_0 \text{ مقدار آماره } F \text{ کدام است؟}$$

$$11/5 \quad (1)$$

$$12 \quad (2)$$

$$12/5 \quad (3)$$

$$14 \quad (4)$$

۱۰۲- مدل برازش یافته رگرسیون خطی ساده $\hat{Y} = 10 + 5X$ بر اساس $n = 52$ زوج مشاهده به روش کمترین توان‌های دوم حاصل شده است. انحراف معیار برآوردگرهای عرض از مبدأ و شیب خط به ترتیب ۵ و $\sqrt{5}$ برآورد شده است. چنانچه مقادیر متغیر مستقل X نصف شوند، مقدار آماره t آزمون صفر بودن شیب خط رگرسیون برای داده‌های جدید کدام است؟

$$(1) \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

$$(2) 2\sqrt{5}$$

$$(3) \sqrt{5}$$

$$(4) 2$$

۱۰۳- مدل رگرسیون زیر را در نظر بگیرید. برآورد کمترین توان‌های دوم ضرایب رگرسیونی تحت کدام شرایط قابل محاسبه نیست؟

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \varepsilon$$

$$(1) x_1 = \alpha x_2 (\alpha \neq 0)$$

$$(2) \text{corr}(x_1, x_2) = 0$$

$$(3) \text{corr}(x_2, x_3 + 5) = 0.4$$

$$(4) \text{corr}(x_2, 2x_3 - 5) = -0.4$$

۱۰۴- با چه تبدیلی می‌توان مدل غیر خطی $y = \beta_0 e^{\beta_1 X} + \varepsilon$ را به مدل خطی $y' = \beta'_0 + \beta'_1 X' + \varepsilon'$ تبدیل کرد؟

$$(1) y' = \ln y, X' = \ln X$$

$$(2) y' = y, X' = \ln X$$

$$(3) y' = \ln y, X' = X$$

$$(4) y' = \ln y, X' = \frac{1}{\ln X}$$

۱۰۵- در رگرسیون $Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \varepsilon$ با $n = 16$ می‌خواهیم فرض $H_0: \beta_2 = 0$ را آزمون کنیم. اگر برای مدل کامل، $SST = 300$ و $SSR = 180$ باشد و برای مدل کاهش یافته $SSR = 160$ باشد، آماره آزمون فیشر (F) کدام است؟

$$(1) 1$$

$$(2) 1/67$$

$$(3) 2$$

$$(4) 2/33$$